Schémas numériques d'ordre élevé et préservant l'asymptotique pour l'hydrodynamique radiative

UNIVERSITÉ DE NANTES

Laboratoire de Mathématiques Jean Leray
UMR 6629 - Nantes

Florian Blachère[1]
sous la direction de Rodolphe Turpault[2]

[1]Laboratoire de Mathématiques Jean Leray (LMJL),
Université de Nantes,
[2]Institut de Mathématiques de Bordeaux (IMB),
Bordeaux-INP

Soutenance de thèse,
27/09/2016, Nantes

Plan

Plan

1. Contexte général
2. Présentation du schéma volumes finis HLL-DLP
   - Schéma limite
   - Schéma sans terme source
   - Résultats sans terme source
3. Extension avec terme source : HLL-DLP-AP
   - Schéma avec terme source
   - Résultats avec terme source
4. Conclusion et perspectives

Problématique

Système de lois de conservation avec terme source :

$$\partial_t \mathbf{W} + \mathrm{div}(\mathbf{F}(\mathbf{W})) = \gamma(\mathbf{W})(\mathbf{R}(\mathbf{W}) - \mathbf{W}) \qquad (1)$$

- $\mathcal{A}$: ensemble des états admissibles,
- $\mathbf{W} \in \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^N$: variables conservatives,
- $\mathbf{F}$: flux physique,
- $\gamma > 0$: contrôle de la raideur du terme source,
- $\mathbf{R}$: fonction continue satisfaisant les conditions de compatibilité de Berthon, LeFloch et Turpault [BLT13].

Problématique

Système de lois de conservation avec terme source :

$$\partial_t \mathbf{W} + \operatorname{div}(\mathbf{F}(\mathbf{W})) = \gamma(\mathbf{W})(\mathbf{R}(\mathbf{W}) - \mathbf{W}) \tag{1}$$

- $\mathcal{A}$: ensemble des états admissibles,
- $\mathbf{W} \in \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^N$: variables conservatives,
- $\mathbf{F}$: flux physique,
- $\gamma > 0$: contrôle de la raideur du terme source,
- $\mathbf{R}$: fonction continue satisfaisant les conditions de compatibilité de Berthon, LeFloch et Turpault [BLT13].

Sous les conditions de compatibilité, (1) dégénère vers une équation de diffusion quand $\gamma t \to \infty$:

$$\partial_t w - \operatorname{div}\big(f(w)\nabla w\big) = 0. \tag{2}$$

- $w \in \mathbb{R}$ lié à $\mathbf{W}$ et $f(w) > 0$.

Exemple #1

Modèle d'Euler isentropique avec friction

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t \rho \mathbf{u} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = -\kappa \rho \mathbf{u} \end{cases}, \text{ avec } p'(\rho) > 0$$

$$\mathcal{A} = \{(\rho, \rho \mathbf{u})^T \in \mathbb{R}^3 / \rho > 0\}$$

Formalisme de (1) :

- $\mathbf{W} = (\rho \quad \rho \mathbf{u})^T$
- $\mathbf{R}(\mathbf{W}) = (\rho \quad 0)^T$
- $\mathbf{F}(\mathbf{W}) = \left(\rho \mathbf{u} \quad \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p\mathbf{I}\right)^T$
- $\gamma(\mathbf{W}) = \kappa > 0$

Exemple #1

Modèle d'Euler isentropique avec friction

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t \rho \mathbf{u} + \mathrm{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = -\kappa \rho \mathbf{u} \end{cases}, \text{ avec } p'(\rho) > 0$$

$$\mathcal{A} = \{(\rho, \rho \mathbf{u})^T \in \mathbb{R}^3 / \rho > 0\}$$

Formalisme de (1) :

- $\mathbf{W} = (\rho \quad \rho \mathbf{u})^T$
- $\mathbf{R}(\mathbf{W}) = (\rho \quad 0)^T$
- $\mathbf{F}(\mathbf{W}) = \left(\rho \mathbf{u} \quad \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathbf{I}\right)^T$
- $\gamma(\mathbf{W}) = \kappa > 0$

Limite ($\kappa t \to \infty$) [MM90 ; HN03a ; HMP05 ; BLT13] :

$$\partial_t \rho - \mathrm{div}\left(\frac{p'(\rho)}{\kappa} \nabla \rho\right) = 0$$

Exemple #2

Modèle M_1 pour le transfert radiatif [DF99] :

$$\begin{cases} \partial_t E_R + \operatorname{div}(\mathbf{F}_R) = c\sigma^e a T^4 - c\sigma^a E_R \\ \partial_t \mathbf{F}_R + c^2 \operatorname{div}(\mathbf{P}_R(E_R, \mathbf{F}_R)) = -c\sigma^f \mathbf{F}_R \\ \rho C_v \partial_t T = c\sigma^a E_R - c\sigma^e a T^4 \end{cases}$$

$$\sigma = \sigma(E_R, \mathbf{F}_R, T) > 0$$

$$\mathcal{A} = \{(E_R, \mathbf{F}_R, T)^T \in \mathbb{R}^4 / E_R > 0, T > 0, \|\mathbf{F}_R\| < cE_R\}$$

Formalisme de (1) :

- $\mathbf{W} = (E_R \quad \mathbf{F}_R \quad T)^T$
- $\mathbf{F}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_R & c^2\mathbf{P}_R & 0 \end{pmatrix}^T$
- $\mathbf{R}(\mathbf{W}) = \dots$
- $\gamma(\mathbf{W}) = c\sigma^m(\mathbf{W})$

Exemple #2

Modèle M_1 pour le transfert radiatif [DF99] :

$$\begin{cases} \partial_t E_R + \mathrm{div}\,(\mathbf{F}_R) = c\sigma^e a T^4 - c\sigma^a E_R \\ \partial_t \mathbf{F}_R + c^2 \mathrm{div}\,(\mathbf{P}_R(E_R, \mathbf{F}_R)) = -c\sigma^f \mathbf{F}_R \\ \rho C_v \partial_t T = c\sigma^a E_R - c\sigma^e a T^4 \end{cases}$$

$$\sigma = \sigma(E_R, \mathbf{F}_R, T) > 0$$

$$\mathcal{A} = \{(E_R, \mathbf{F}_R, T)^T \in \mathbb{R}^4 / E_R > 0, T > 0, \|\mathbf{F}_R\| < cE_R\}$$

Formalisme de (1) :

- $\mathbf{W} = (E_R \quad \mathbf{F}_R \quad T)^T$
- $\mathbf{F}(\mathbf{W}) = \left(\mathbf{F}_R \quad c^2\mathbf{P}_R \quad 0\right)^T$
- $\mathbf{R}(\mathbf{W}) = \ldots$
- $\gamma(\mathbf{W}) = c\sigma^m(\mathbf{W})$

Limite ($c\sigma^m t \to \infty$) : *équation de diffusion à l'équilibre* [Pom73]

$$\partial_t(\rho C_v T + aT^4) - \mathrm{div}\left(\frac{c}{3\sigma^R}\nabla(aT^4)\right) = 0$$

Exemple #3

Hydrodynamique radiative :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t\rho + \mathrm{div}(\rho\mathbf{u}) & = & 0 \\ \partial_t\rho\mathbf{u} + \mathrm{div}(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} + \mathbf{P}_R) + \nabla p & = & \frac{1}{c}\sigma^f\mathbf{F}_R \\ \partial_t E + \mathrm{div}((E+p)\mathbf{u}) & = & c\left(\sigma^a E_R - \sigma^e a T^4\right) \\ \partial_t E_R + \mathrm{div}(\mathbf{F}_R) & = & c\left(\sigma^e a T^4 - \sigma^a E_R\right) \\ \partial_t\mathbf{F}_R + c^2\mathrm{div}(\mathbf{P}_R) & = & -c\sigma^f\mathbf{F}_R \end{array}\right.$$

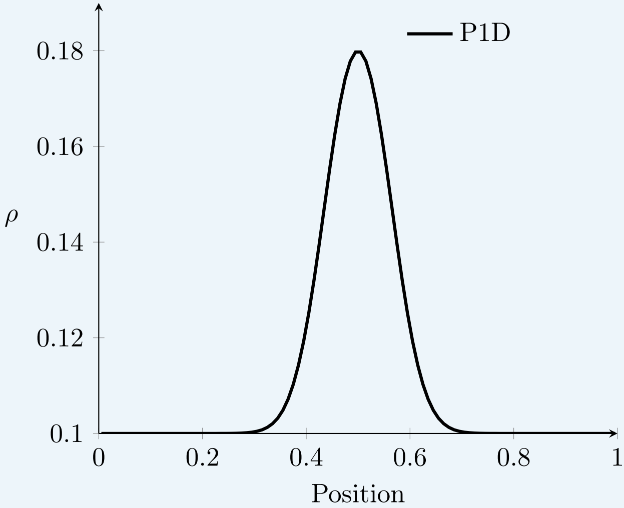
$$\mathcal{A} = \{\mathbf{U} = (\rho, \rho\mathbf{u}, E, E_R, \mathbf{F}_R)^T \in \mathbb{R}^7 / \rho > 0, p > 0, E_R > 0, \|\mathbf{F}_R\| < cE_R\}$$

Formalisme de (1) :

- $\mathbf{W} = (\rho\ \rho\mathbf{u}\ E\ E_R\ \mathbf{F}_R)^T$
- $\mathbf{F}(\mathbf{W}) = \dots$
- $\mathbf{R}(\mathbf{W}) = \dots$
- $\gamma(\mathbf{W}) = c\sigma^m(\mathbf{W})$

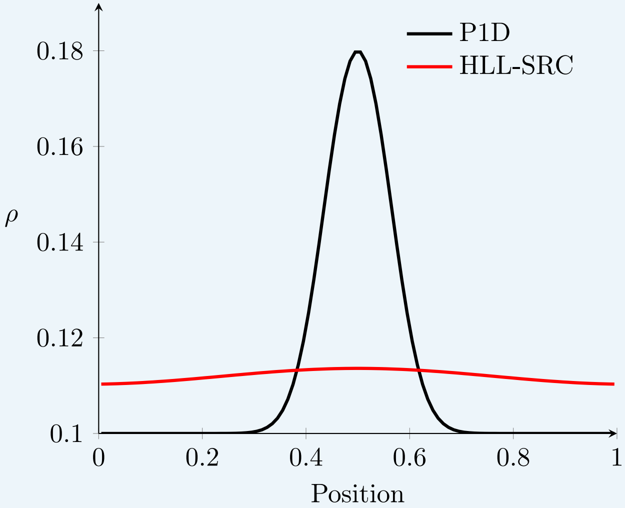
Euler avec friction :

$$\rho_0(x) = \frac{1}{10}\left(\exp(-\frac{(x-1/2)^2}{0{,}005}) + 1\right) ; u_0 = 0 ; \kappa = 3125 ; t_f = 3{,}2 ; \Delta x = 10^{-2}$$



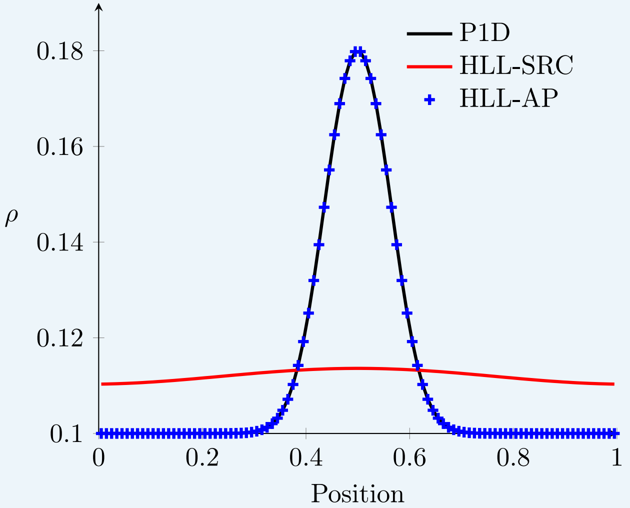
Euler avec friction :

$$\rho_0(x) = \frac{1}{10}\left(\exp(-\frac{(x-1/2)^2}{0{,}005}) + 1\right) ; \; u_0 = 0 ; \; \kappa = 3125 ; \; t_f = 3{,}2 ; \; \Delta x = 10^{-2}$$



Euler avec friction :

$$\rho_0(x) = \frac{1}{10}\left(\exp(-\frac{(x-1/2)^2}{0{,}005}) + 1\right)\,;\ u_0 = 0\,;\ \kappa = 3125\,;\ t_f = 3{,}2\,;\ \Delta x = 10^{-2}$$



But d'un schéma AP (au sens de JIN [Jin99])

Lois de conservation (1) :
$\partial_t \mathbf{W} + \mathrm{div}(\mathbf{F}(\mathbf{W})) = \gamma(\mathbf{W})(\mathbf{R}(\mathbf{W}) - \mathbf{W})$

$$\begin{array}{ccc} \text{Lois de conservation (1) :} & & \text{Équation de diffusion (2) :} \\ \partial_t \mathbf{W} + \operatorname{div}(\mathbf{F}(\mathbf{W})) = \gamma(\mathbf{W})(\mathbf{R}(\mathbf{W}) - \mathbf{W}) & \xrightarrow{\gamma t \to \infty} & \partial_t w - \operatorname{div}\big(f(w)\nabla w\big) = 0 \end{array}$$

$$\text{Lois de conservation (1) :} \quad \partial_t \mathbf{W} + \operatorname{div}(\mathbf{F}(\mathbf{W})) = \gamma(\mathbf{W})(\mathbf{R}(\mathbf{W}) - \mathbf{W}) \xrightarrow{\gamma t \to \infty} \text{Équation de diffusion (2) :} \quad \partial_t w - \operatorname{div}\big(f(w)\nabla w\big) = 0$$

consistant :
$\Delta t, \Delta x \to 0$

Schéma numérique

But d'un schéma AP (au sens de JIN [Jin99])

$$
\begin{tikzcd}
\begin{array}{c}\text{Lois de conservation (1) :}\\ \partial_t \mathbf{W} + \operatorname{div}(\mathbf{F}(\mathbf{W})) = \gamma(\mathbf{W})(\mathbf{R}(\mathbf{W}) - \mathbf{W})\end{array} \arrow[r, "\gamma t \to \infty"] & \begin{array}{c}\text{Équation de diffusion (2) :}\\ \partial_t w - \operatorname{div}\big(f(w)\nabla w\big) = 0\end{array} \\
\text{Schéma numérique} \arrow[u, "\begin{array}{c}\text{consistant :}\\ \Delta t, \Delta x \to 0\end{array}"] \arrow[r, "\gamma t \to \infty"'] & \text{Schéma limite}
\end{tikzcd}
$$

But d'un schéma AP (au sens de Jin [Jin99])

$$
\begin{tikzcd}
\begin{array}{c}\text{Lois de conservation (1) :}\\ \partial_t \mathbf{W} + \operatorname{div}(\mathbf{F}(\mathbf{W})) = \gamma(\mathbf{W})(\mathbf{R}(\mathbf{W}) - \mathbf{W})\end{array} \arrow[r, "\gamma t \to \infty"] & \begin{array}{c}\text{Équation de diffusion (2) :}\\ \partial_t w - \operatorname{div}\big(f(w)\nabla w\big) = 0\end{array} \\
\text{Schéma numérique} \arrow[u, "\begin{array}{c}\text{consistant :}\\ \Delta t, \Delta x \to 0\end{array}"] \arrow[r, "\gamma t \to \infty"'] & \text{Schéma limite} \arrow[u, dashed, "\text{consistant ?}"']
\end{tikzcd}
$$

Maillage 1D :

- cinétique : Klar [Kla99], Lemou et Mieussens [LM08], Filbet et Jin [FJ10], Dimarco et Pareschi [DP12], Lafitte et Samaey [LS12],
- contrôle de la diffusion numérique :
  - équations du Télégraphe : Gosse et Toscani [GT02],
  - modèle M_1 : Buet et al. [BD06 ; BC07], Berthon, Charrier et Dubroca [BCD07], ...
  - Euler avec gravité et friction : Chalons et al. [CCGRS10],
- avec les idées de la reconstruction hydrostatique pour Euler avec friction : Bouchut, Ounaissa et Perthame [BOP07],
- IMEX-RK : Boscarino et al. [BPR13 ; BLR14],
- différences finies : Aregba-Driollet, Briani et Natalini [ABN08 ; ABN16],
- généralisation de [GT02] par Berthon et Turpault [BT11].

État de l'art (non exhaustif) de schémas AP

Maillage 2D admissible (cartésien, triangulation de Delaunay, ...) :

- reprise des techniques du 1D dans chaque direction

État de l'art (non exhaustif) de schémas AP

Maillage 2D admissible (cartésien, triangulation de Delaunay, ...) :

- reprise des techniques du 1D dans chaque direction

Maillage 2D non structuré :

- schéma avec flux aux nœuds : Buet, Després et Franck [Fra12 ; BDF12a ; BDF12b ; BDF15 ; BDFL16] avec le schéma de Breil et Maire [BM07] comme limite,
- avec le schéma diamant (Coudière, Vila et Villedieu [CVV99]) à la limite : Berthon, Moebs, Sarazin-Desbois et Turpault [BMST16],
- St-Venant avec friction : Duran, Marche, Turpault et Berthon [DMTB15].

On souhaite un schéma volumes finis explicite

- pour tout maillage 2D non structuré,
- pour tout système de lois de conservation du formalisme (1),
- sous une condition CFL "hyperbolique" : $\max\limits_{K,i}\left(b_{K,i}\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \leq \frac{1}{2}$,
  - stabilité,
  - (P1)-(PI) préservation de $\mathcal{A}$,
  - (P2) préservation du comportement asymptotique.

But du développement

On souhaite un schéma volumes finis explicite

- pour tout maillage 2D non structuré,
- pour tout système de lois de conservation du formalisme (1),
- sous une condition CFL "hyperbolique" : $\max_{K,i} \left(b_{K,i} \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \leq \frac{1}{2}$,
  - stabilité,
  - (P1)-(PI) préservation de $\mathcal{A}$,
  - (P2) préservation du comportement asymptotique.

Étapes de la construction :

- choisir un "bon" schéma limite pour (2),
- construire un schéma qui va dégénérer vers ce dernier :
  - (PII) avec une diffusion numérique correctement orientée,
  - (PIII) comme une extension de flux à deux points,
- utiliser des coefficients positifs pour obtenir les propriétés par convexité.

Travaux réalisés

- construction du schéma volumes finis HLL-DLP-AP préservant l'ensemble des états admissibles et le comportement asymptotique pour tout système (1) sur tout maillage 2D non structuré,
- extension à l'ordre élevé des schémas volumes finis HLL-AP [BT11] et HLL-DLP-AP avec la technique MOOD [CDL11 ; Dio12],
- construction de solutions de référence avec terme source,
- codes de calcul parallèles et multi-physique pour (1) et (2) en 1D et 2D.

- construction du schéma volumes finis HLL-DLP-AP préservant l'ensemble des états admissibles et le comportement asymptotique pour tout système (1) sur tout maillage 2D non structuré,
- extension à l'ordre élevé des schémas volumes finis HLL-AP [BT11] et HLL-DLP-AP avec la technique MOOD [CDL11 ; Dio12],
- construction de solutions de référence avec terme source,
- codes de calcul parallèles et multi-physique pour (1) et (2) en 1D et 2D.

- F. Blachère and R. Turpault, An admissibility and asymptotic-preserving scheme for systems of conservation laws with source term on 2D unstructured meshes, J. Comput. Phys., vol. 315, pp. 98–123, 2016,
- F. Blachère and R. Turpault, A high-order, admissibility and asymptotic-preserving scheme for systems of conservation laws with source term on 2D unstructured meshes, en cours de soumission.

Plan

Plan

Choix du schéma limite pour (2)

Schéma volumes finis explicite pour les équations de diffusion :

$$\partial_t w - \mathrm{div}(f(w)\nabla w) = 0 \qquad (2)$$

Choix du schéma limite pour (2)

Schéma volumes finis explicite pour les équations de diffusion :

$$\partial_t w - \mathrm{div}(f(w)\nabla w) = 0 \tag{2}$$

Choix : schéma développé par Droniou et Le Potier [DLP11]

- conservatif et consistant avec l'équation de diffusion sur tout maillage,
- respecte le principe du maximum discret et préserve $\mathcal{A}$,

Choix du schéma limite pour (2)

Schéma volumes finis explicite pour les équations de diffusion :

$$\partial_t w - \mathrm{div}(f(w)\nabla w) = 0 \tag{2}$$

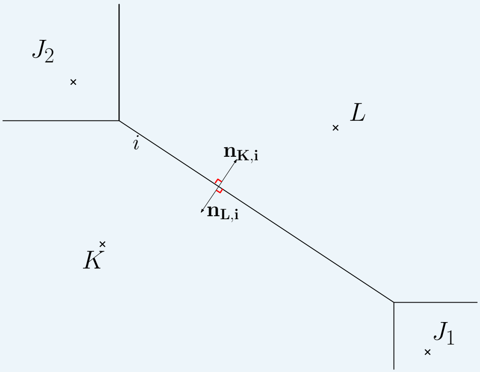
Choix : schéma développé par Droniou et Le Potier [DLP11]

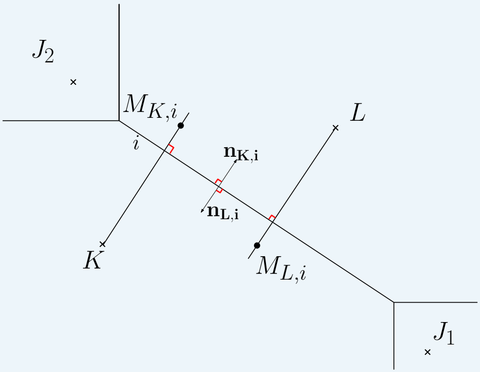
- conservatif et consistant avec l'équation de diffusion sur tout maillage,
- respecte le principe du maximum discret et préserve $\mathcal{A}$,
- non linéaire :

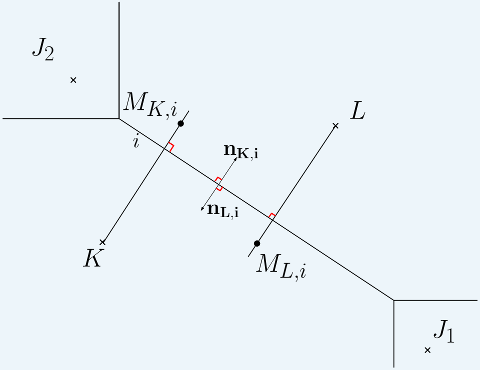
$$(f(w_K)\nabla_i w_K)\cdot \mathbf{n}_{K,i} \simeq \sum_{J\in\mathcal{S}_{K,i}} \overline{\nu}^J_{K,i}(w)(w_J - w_K),$$

  - $\mathcal{S}_{K,i}$: l'ensemble des points utilisés pour la reconstruction sur l'interface i de la cellule K,
  - $\overline{\nu}^J_{K,i}(w) \geq 0$.

Présentation du schéma de [DLP11]



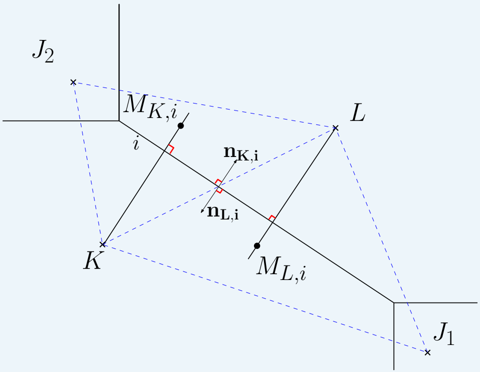

J_2
$M_{K,i}$
L
i
$\mathbf{n_{K,i}}$
$\mathbf{n_{L,i}}$
K
$M_{L,i}$
J_1



Deux reconstructions :

$$\nabla_i w_K \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \frac{w_{M_{K,i}} - w_K}{|KM_{K,i}|}$$

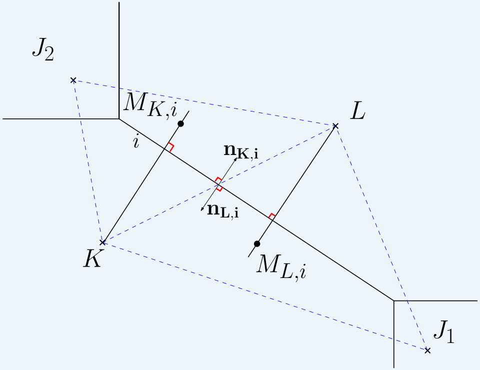
$$\nabla_i w_L \cdot \mathbf{n}_{L,i} = \frac{w_{M_{L,i}} - w_L}{|LM_{L,i}|}$$



Deux reconstructions :

$$\nabla_i w_K \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \frac{w_{M_{K,i}} - w_K}{|KM_{K,i}|}$$

$$\nabla_i w_L \cdot \mathbf{n}_{L,i} = \frac{w_{M_{L,i}} - w_L}{|LM_{L,i}|}$$



Deux reconstructions :

$$\nabla_i w_K \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \frac{w_{M_{K,i}} - w_K}{|KM_{K,i}|}$$

$$\nabla_i w_L \cdot \mathbf{n}_{L,i} = \frac{w_{M_{L,i}} - w_L}{|LM_{L,i}|}$$

Combinaison convexe : $\theta_{K,i} + \theta_{L,i} = 1$, $\theta_{K,i} \geq 0$, $\theta_{L,i} \geq 0$

$$\begin{aligned}\nabla_i w_K \cdot \mathbf{n}_{K,i} &= \theta_{K,i}(w)\nabla_i w_K \cdot \mathbf{n}_{K,i} + \theta_{L,i}(w)\nabla_i w_L \cdot \mathbf{n}_{K,i} \\ &= \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \overline{\nu}_{K,i}^J(w)(w_J - w_K), \text{ avec } \overline{\nu}_{K,i}^J(w) \geq 0.\end{aligned}$$

Plan

Schéma pour le système hyperbolique ($\gamma = 0$)

$$\mathbf{W}_K^{n+1} = \mathbf{W}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \boldsymbol{\mathcal{F}}_i(\mathbf{W}_K, \mathbf{W}_L, \dots) \cdot \mathbf{n}_{K,i} \tag{3}$$

$$\mathbf{W}_K^{n+1} = \mathbf{W}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \boldsymbol{\mathcal{F}}_i(\mathbf{W}_K, \mathbf{W}_L, \dots) \cdot \mathbf{n}_{K,i} \tag{3}$$

Théorème (B. et Turpault [BT16])

On suppose que le flux $\boldsymbol{\mathcal{F}}_i$ est conservatif et que les propriétés suivantes sont vérifiées :

(H1) *Consistance : si* $\mathbf{W}_K^n \equiv \mathbf{W}$ *alors* $\boldsymbol{\mathcal{F}}_i \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \mathbf{F}(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{n}_{K,i}$,

(H2) *Reconstruction :* $\exists\ \nu_{K,i}^J \geq 0,\ \boldsymbol{\mathcal{F}}_i \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \nu_{K,i}^J \boldsymbol{\mathcal{F}}_{KJ} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ}$,

(H3) *Formule de la divergence discrète :* $\sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \nu_{K,i}^J \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ} = 0$.

Alors, le schéma (3) *est stable et préserve* $\mathcal{A}$ *sous la condition CFL suivante :*

$$\max_{\substack{K \in \mathscr{M} \\ J \in \overline{\mathcal{E}}_K}} \left(b_{KJ} \frac{\Delta t}{\delta_{KJ}} \right) \leq \frac{1}{2}. \tag{4}$$

1. flux HLL-TP :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{F}}_i(\mathbf{W}_K, \mathbf{W}_L) \cdot \mathbf{n}_{K,i} &= \frac{\mathbf{F}(\mathbf{W}_K) + \mathbf{F}(\mathbf{W}_L)}{2} \cdot \mathbf{n}_{K,i} - \frac{b_{KL}}{2}(\mathbf{W}_L - \mathbf{W}_K) \\ &= \boldsymbol{\mathcal{F}}_{KL} \cdot \mathbf{n}_{K,i}\end{aligned}$$

Exemple de flux (avec Rusanov)

1. flux HLL-TP :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{F}}_i(\mathbf{W}_K, \mathbf{W}_L) \cdot \mathbf{n}_{K,i} &= \frac{\mathbf{F}(\mathbf{W}_K) + \mathbf{F}(\mathbf{W}_L)}{2} \cdot \mathbf{n}_{K,i} - \frac{b_{KL}}{2}(\mathbf{W}_L - \mathbf{W}_K) \\ &= \boldsymbol{\mathcal{F}}_{KL} \cdot \mathbf{n}_{K,i}\end{aligned}$$

2. flux HLL-DLP :

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_i(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \boldsymbol{\nu}_{K,i}^J(\mathbf{W}) \boldsymbol{\mathcal{F}}_{KJ} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ}$$

Exemple de flux (avec Rusanov)

1. flux HLL-TP :

$$\mathcal{F}_i(\mathbf{W}_K, \mathbf{W}_L) \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{W}_K) + \mathbf{F}(\mathbf{W}_L)}{2} \cdot \mathbf{n}_{K,i} - \frac{b_{KL}}{2}(\mathbf{W}_L - \mathbf{W}_K)$$
$$= \mathcal{F}_{KL} \cdot \mathbf{n}_{K,i}$$

2. flux HLL-DLP :

$$\mathcal{F}_i(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \boldsymbol{\nu}_{K,i}^J(\mathbf{W}) \mathcal{F}_{KJ} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ}$$

Mais . . .

1. flux HLL-TP :
   - satisfait les hypothèses du théorème,
   - sa diffusion numérique est orientée selon KL.

Exemple de flux (avec Rusanov)

1. flux HLL-TP :

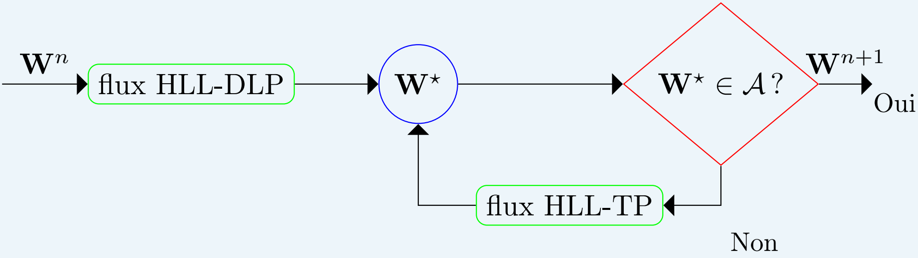
$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_i(\mathbf{W}_K, \mathbf{W}_L) \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{W}_K) + \mathbf{F}(\mathbf{W}_L)}{2} \cdot \mathbf{n}_{K,i} - \frac{b_{KL}}{2}(\mathbf{W}_L - \mathbf{W}_K)$$
$$= \boldsymbol{\mathcal{F}}_{KL} \cdot \mathbf{n}_{K,i}$$

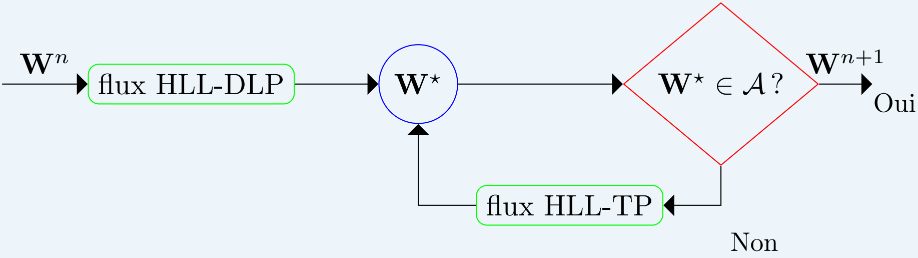
2. flux HLL-DLP :

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_i(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \boldsymbol{\nu}_{K,i}^J(\mathbf{W}) \boldsymbol{\mathcal{F}}_{KJ} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ}$$

Mais ...

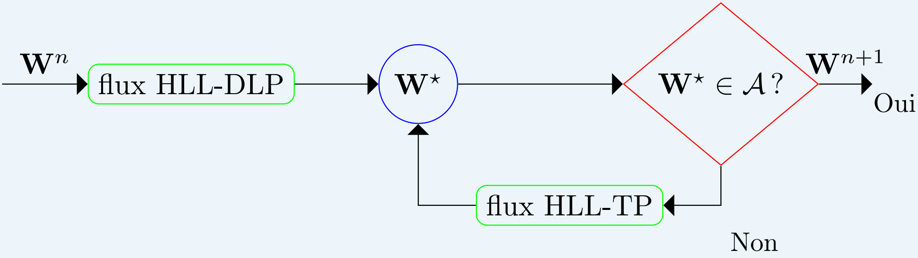
1. flux HLL-TP :
   - satisfait les hypothèses du théorème,
   - sa diffusion numérique est orientée selon KL.
2. flux HLL-DLP :
   - ne respecte pas l'hypothèse (H3),
   - possède une diffusion numérique bien orientée.


$\mathbf{W}^n$
flux HLL-DLP
$\mathbf{W}^\star$
$\mathbf{W}^\star \in \mathcal{A}\,?$
$\mathbf{W}^{n+1}$
Oui
flux HLL-TP
Non



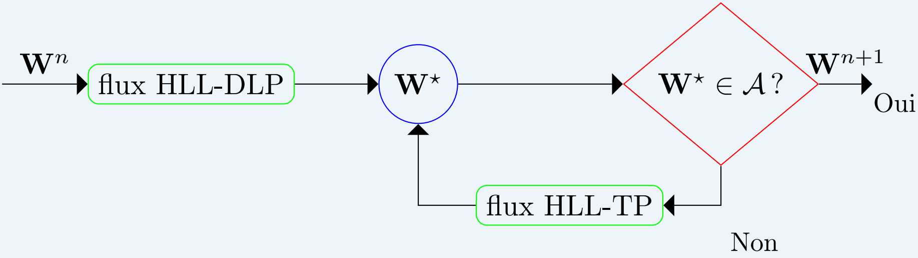
Limitation *a posteriori* inspirée de MOOD [CDL11]

1. $\mathbf{W}^\star$ est calculé avec le flux HLL-DLP et la condition CFL (4),



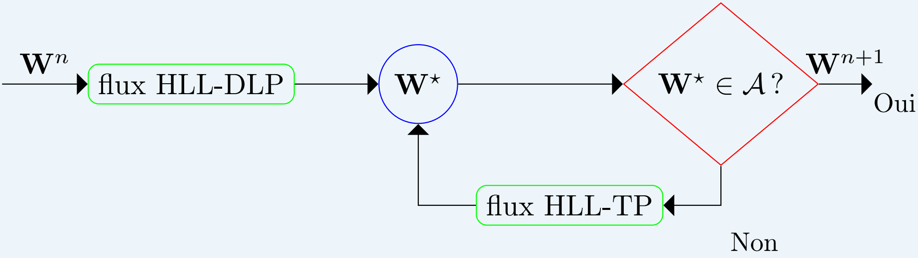
Limitation *a posteriori* inspirée de MOOD [CDL11]

1. $\mathbf{W}^\star$ est calculé avec le flux HLL-DLP et la condition CFL (4),
2. Critère d'admissibilité physique (*Physical Admissiblility Detection*) :



Limitation *a posteriori* inspirée de MOOD [CDL11]

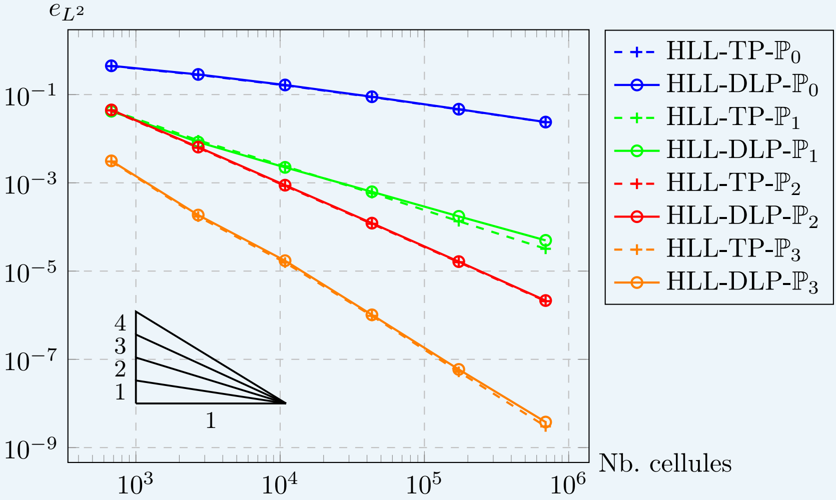
1. $\mathbf{W}^\star$ est calculé avec le flux HLL-DLP et la condition CFL (4),
2. Critère d'admissibilité physique (*Physical Admissiblility Detection*) :
   - si $\mathbf{W}^\star \in \mathcal{A}$ alors les itérations continuent,



Limitation *a posteriori* inspirée de MOOD [CDL11]

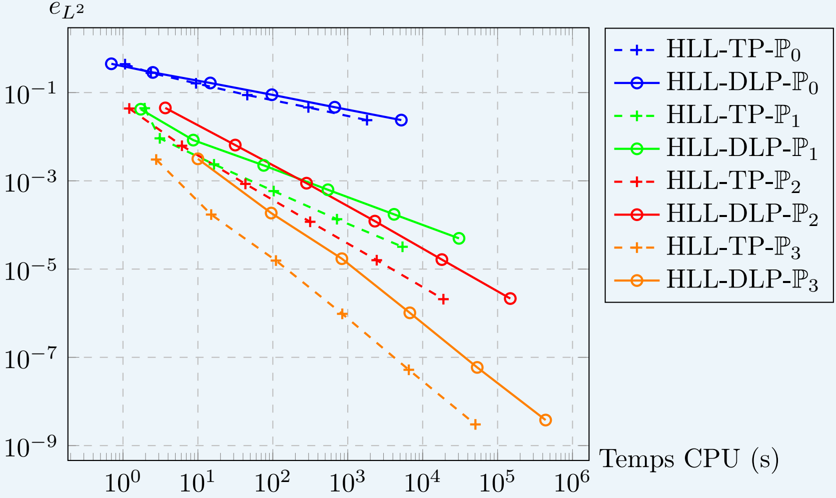
1. $\mathbf{W}^\star$ est calculé avec le flux HLL-DLP et la condition CFL (4),
2. Critère d'admissibilité physique (*Physical Admissiblility Detection*) :
   - si $\mathbf{W}^\star \in \mathcal{A}$ alors les itérations continuent,
   - sinon, l'hypothèse (H3) est vérifiée en utilisant le flux HLL-TP sur les cellules non admissibles.

Plan



e_{L^2}
10^{-1}
10^{-3}
10^{-5}
10^{-7}
10^{-9}
10^3
10^4
10^5
10^6
Nb. cellules
4
3
2
1
1
HLL-TP-$\mathbb{P}_0$
HLL-DLP-$\mathbb{P}_0$
HLL-TP-$\mathbb{P}_1$
HLL-DLP-$\mathbb{P}_1$
HLL-TP-$\mathbb{P}_2$
HLL-DLP-$\mathbb{P}_2$
HLL-TP-$\mathbb{P}_3$
HLL-DLP-$\mathbb{P}_3$

Transport d'un double sinus



Marche à Mach 3 [WC84]

HLL-DLP : $1{,}7 \times 10^6$ cellules, correction HLL-TP $< 1\%$

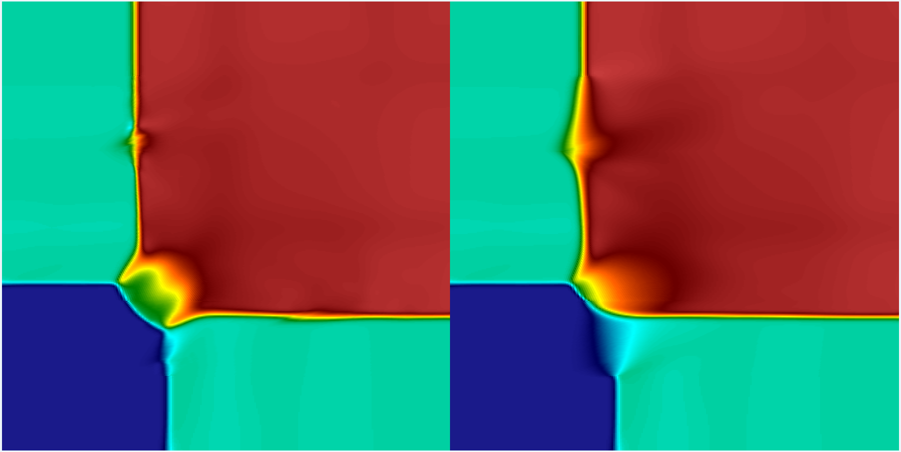
Marche à Mach 3 [WC84]

HLL-TP : $1{,}7 \times 10^3$ cellules

HLL-DLP : $1{,}7 \times 10^6$ cellules, correction HLL-TP $< 1\%$

HLL-DLP : $1{,}7 \times 10^3$ cellules

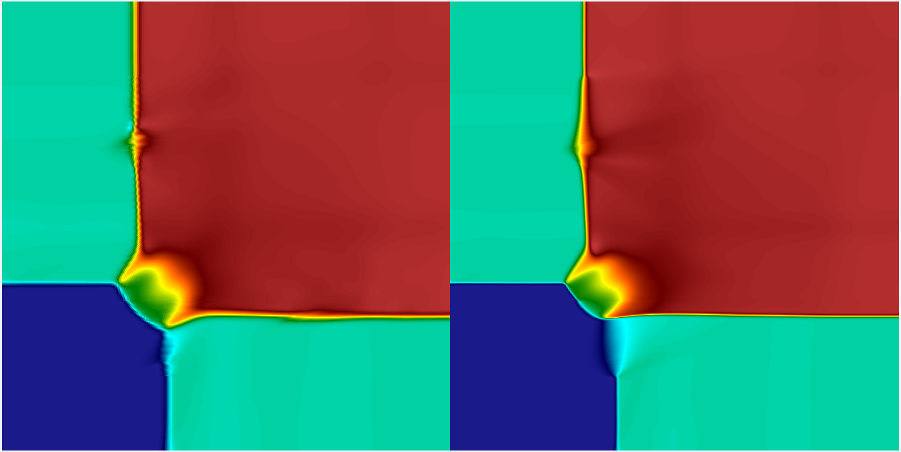
Problème de Riemann 2D à 4 chocs [KT02]



HLL-DLP : 1,5 $\times$ 10^5 cellules, correction HLL-TP $<$ 1%

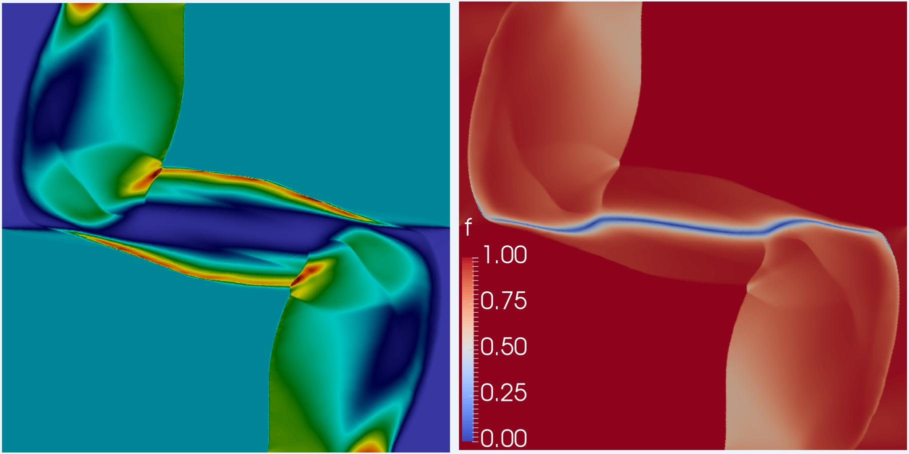
HLL-TP : 1,5 $\times$ 10^5 cellules

Problème de Riemann 2D à 4 chocs [KT02]



HLL-DLP : 1,5 × 10^5 cellules, correction HLL-TP < 1%

HLL-TP : 6 × 10^5 cellules



(a) E_R (b) $f = \frac{\|\mathbf{F}_R\|}{cE_R}$

HLL-DLP : 1,2 $\times 10^6$ cellules,
correction HLL-TP $< 1\%$

Plan

Plan

Schéma pour le système complet (1)

$$\mathbf{W}_K^{n+1} = \mathbf{W}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \overline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{K,i} \cdot \mathbf{n}_{K,i} \tag{5}$$

Schéma pour le système complet (1)

$$\mathbf{W}_K^{n+1} = \mathbf{W}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \overline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{K,i} \cdot \mathbf{n}_{K,i} \tag{5}$$

Construction de $\overline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{K,i}$ avec la technique de [BT11] :

$$\overline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{K,i} \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \nu_{K,i}^J \overline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{KJ} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ}$$

$$\mathbf{W}_K^{n+1} = \mathbf{W}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \overline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{K,i} \cdot \mathbf{n}_{K,i} \tag{5}$$

Construction de $\overline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{K,i}$ avec la technique de [BT11] :

$$\overline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{K,i} \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \nu_{K,i}^J \overline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{KJ} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ} \qquad \alpha_{KJ} = \frac{b_{KJ}}{b_{KJ} + \gamma_K \delta_{KJ}} \in [0;1]$$

Schéma pour le système complet (1)

$$\mathbf{W}_K^{n+1} = \mathbf{W}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \overline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{K,i} \cdot \mathbf{n}_{K,i} \tag{5}$$

Construction de $\overline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{K,i}$ avec la technique de [BT11] :

$$\overline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{K,i} \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \nu_{K,i}^J \overline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{KJ} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ} \qquad \alpha_{KJ} = \frac{b_{KJ}}{b_{KJ} + \gamma_K \delta_{KJ}} \in [0;1]$$

$$\overline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{KJ} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ} = \alpha_{KJ} \boldsymbol{\mathcal{F}}_{KJ} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ} - (\alpha_{KJ} - \alpha_{KK}) \mathbf{F}(\mathbf{W}_K^n) \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ} - (1 - \alpha_{KJ}) b_{KJ} (\mathbf{R}(\mathbf{W}_K^n) - \mathbf{W}_K^n)$$

$$\mathbf{W}_K^{n+1} = \mathbf{W}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \overline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{K,i} \cdot \mathbf{n}_{K,i} \tag{5}$$

Construction de $\overline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{K,i}$ avec la technique de [BT11] :

$$\overline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{K,i} \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \nu_{K,i}^J \overline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{KJ} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ} \qquad \alpha_{KJ} = \frac{b_{KJ}}{b_{KJ} + \gamma_K \delta_{KJ}} \in [0;1]$$

$$\overline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{KJ} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ} = \alpha_{KJ} \boldsymbol{\mathcal{F}}_{KJ} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ} - (\alpha_{KJ} - \alpha_{KK}) \mathbf{F}(\mathbf{W}_K^n) \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ}$$
$$- (1 - \alpha_{KJ}) b_{KJ} (\mathbf{R}(\mathbf{W}_K^n) - \mathbf{W}_K^n)$$

Théorème (B. et Turpault [BT16])

Le schéma (5) est consistant avec le système de lois de conservation (1), sous des conditions techniques sur ν. De plus, il préserve l'ensemble des états admissibles $\mathcal{A}$ sous la condition CFL :

$$\max_{\substack{K \in \mathscr{M} \\ J \in \overline{\mathcal{E}}_K}} \left(b_{KJ} \frac{\Delta t}{\delta_{KJ}} \right) \leq \frac{1}{2}. \tag{4}$$

- Le schéma avec terme source est-il AP ?

- Le schéma avec terme source est-il AP ?
  ➔ généralement non : la diffusion numérique est bien orientée mais le coefficient doit être ajusté.

- Le schéma avec terme source est-il AP ?
  ➔ généralement non : la diffusion numérique est bien orientée mais le coefficient doit être ajusté.

Formulation équivalente :

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{W} + \operatorname{div}(\mathbf{F}(\mathbf{W})) &= \gamma(\mathbf{W})(\mathbf{R}(\mathbf{W}) - \mathbf{W}), && (1)\\ &= \gamma(\mathbf{W})(\mathbf{R}(\mathbf{W}) - \mathbf{W}) + (\overline{\gamma} - \overline{\gamma})\mathbf{W}, \\ \partial_t \mathbf{W} + \operatorname{div}(\mathbf{F}(\mathbf{W})) &= (\gamma(\mathbf{W}) + \overline{\gamma})(\overline{\mathbf{R}}(\mathbf{W}) - \mathbf{W}), && (6)\end{aligned}$$

avec $\gamma(\mathbf{W}) + \overline{\gamma} > 0$ et $\overline{\mathbf{R}}(\mathbf{W}) := \dfrac{\gamma \mathbf{R}(\mathbf{W}) + \overline{\gamma}\mathbf{W}}{\gamma + \overline{\gamma}}$.

$$\rho_K^{n+1} = \rho_K^n + \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \nu_{K,i}^{J,\rho} \frac{b_{KJ}^2}{2(\kappa_K + \bar{\kappa}_{K,i}^J)\delta_{KJ}} (\rho_J^n - \rho_K^n)$$

$$\rho_K^{n+1} = \rho_K^n + \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \nu_{K,i}^{J,\rho} \frac{b_{KJ}^2}{2(\kappa_K + \bar{\kappa}_{K,i}^J)\delta_{KJ}} \left(\rho_J^n - \rho_K^n\right)$$

$$\rho_K^{n+1} = \rho_K^n + \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \frac{\overline{\nu}_{K,i}^J}{\kappa_K} (p_J^n - p_K^n)$$

$$\longrightarrow \partial_t \rho - \operatorname{div}\left(\frac{1}{\kappa} \nabla p(\rho)\right) = 0$$

$$\rho_K^{n+1} = \rho_K^n + \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \nu_{K,i}^{J,\rho} \frac{b_{KJ}^2}{2(\kappa_K + \bar{\kappa}_{K,i}^J)\delta_{KJ}} (\rho_J^n - \rho_K^n)$$

Correction asymptotique $\bar{\kappa}$

$$\frac{\nu_{K,i}^J b_{KJ}^2}{2(\kappa_K + \bar{\kappa}_{K,i}^J)\delta_{KJ}} (\rho_J^n - \rho_K^n) = \frac{\overline{\nu}_{K,i}^J}{\kappa} (p_J^n - p_K^n)$$

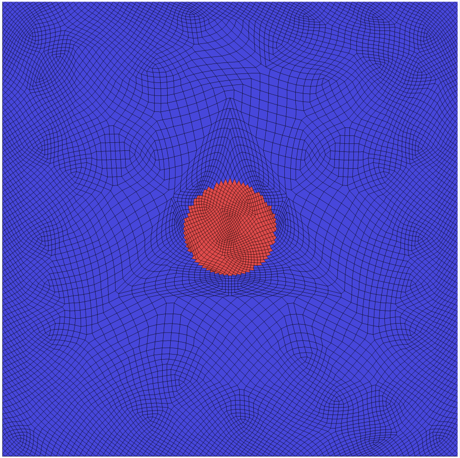
$$\rho_K^{n+1} = \rho_K^n + \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \frac{\overline{\nu}_{K,i}^J}{\kappa_K} (p_J^n - p_K^n)$$

$$\longrightarrow \partial_t \rho - \mathrm{div} \left(\frac{1}{\kappa} \nabla p(\rho) \right) = 0$$

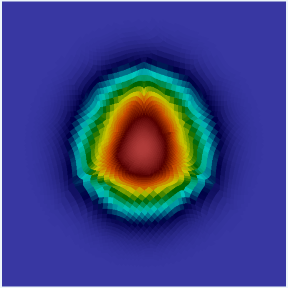
Plan

Comparaison proche de la limite de diffusion

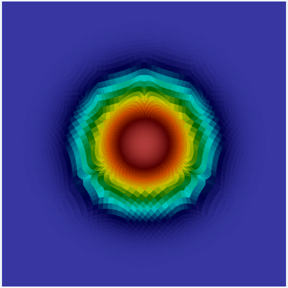
$$\rho_0(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \|\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}\|^2 < 0{,}1^2 \\ 0{,}1 & \text{sinon} \end{cases} \; ; \; \mathbf{u} = 0 \; ; \; \kappa = 2000 \; ; \; t_f = 10 \; ; \; 9{,}4 \times 10^3 \text{ cellules}$$



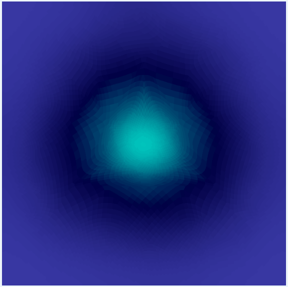
Comparaison proche de la limite de diffusion



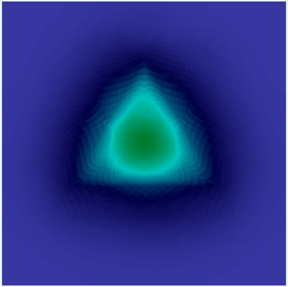
(a) HLL-DLP-AP



(b) DLP



(c) HLL-DLP-NoAP



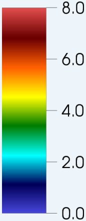
(d) HLL-TP-NoAP

HLL-DLP-AP-$\mathbb{P}_0$
sur 1×10^6 cellules

Marche avec friction non linéaire : $\kappa(\rho) = 10(\rho/7)^3$

HLL-DLP-AP-$\mathbb{P}_0$
sur 4×10^4 cellules

HLL-DLP-AP-$\mathbb{P}_0$
sur 1×10^6 cellules



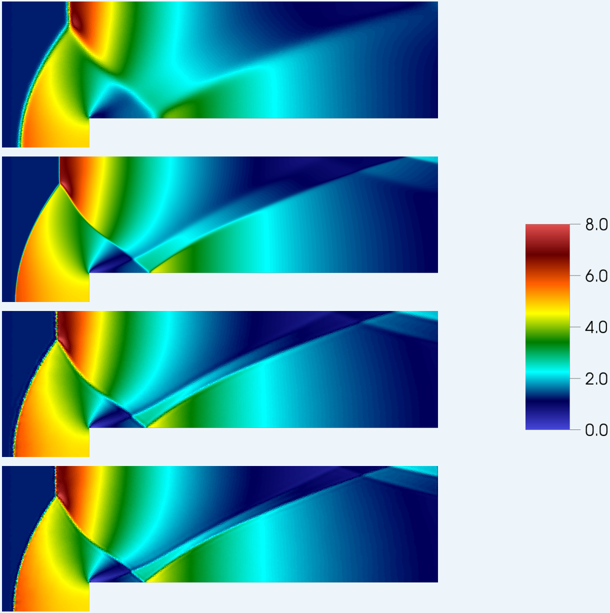
Marche avec friction non linéaire : $\kappa(\rho) = 10(\rho/7)^3$

HLL-DLP-AP-$\mathbb{P}_0$ sur 4×10^4 cellules

HLL-DLP-AP-$\mathbb{P}_0$ sur 1×10^6 cellules

HLL-DLP-AP-$\mathbb{P}_1$ sur 4×10^4 cellules

HLL-DLP-AP-$\mathbb{P}_3$ sur 4×10^4 cellules



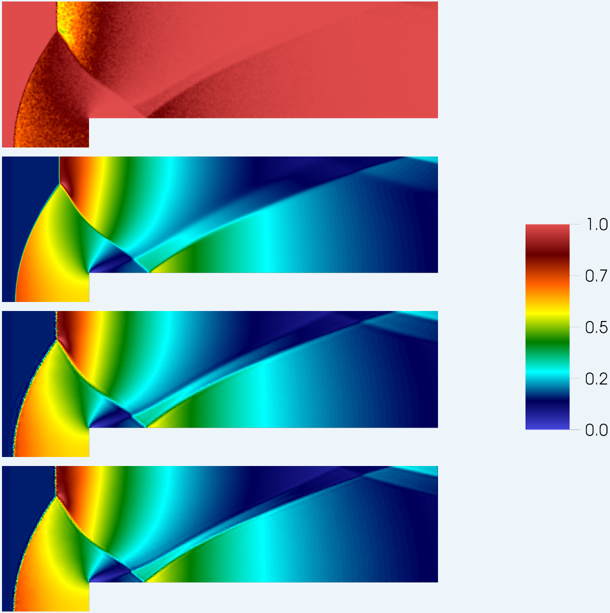
Marche avec friction non linéaire : $\kappa(\rho) = 10(\rho/7)^3$

$\beta_K^n = \frac{\Delta_l}{\Delta_l + \gamma_K^n t^n \Delta x_K}$

HLL-DLP-AP-$\mathbb{P}_0$ sur 1×10^6 cellules

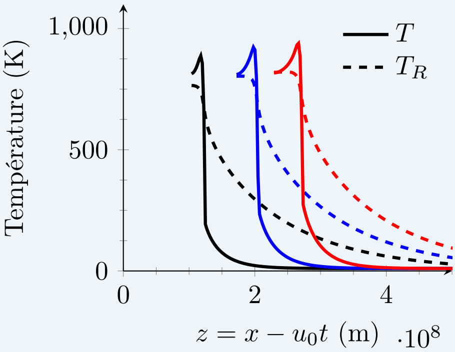
HLL-DLP-AP-$\mathbb{P}_1$ sur 4×10^4 cellules

HLL-DLP-AP-$\mathbb{P}_3$ sur 4×10^4 cellules

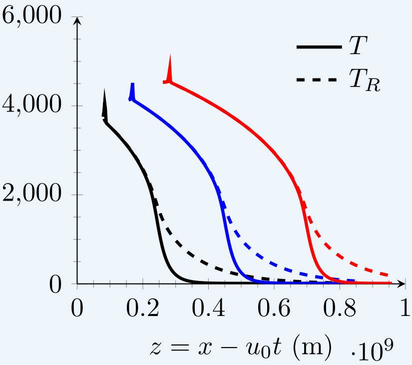


Chocs radiatifs 1D [HN03b ; Gon06 ; GAH07]

- $x \in [0; 7] \times 10^8$m ; 300 cellules ; $\Delta x \simeq 2{,}33 \times 10^6$ m,
- $T_0 = 10$ K ; $\sigma = 3{,}1 \times 10^{-8}$ m^{-1},
- subcritique : $u_0 = -6 \times 10^3$ m · s^{-1} ; $t_f = 3{,}8 \times 10^4$ s,
- supercritique : $u_0 = -2 \times 10^4$ m · s^{-1} ; $t_f = 1{,}3 \times 10^4$ s.



$1{,}7 \times 10^4$; $2{,}8 \times 10^4$; $3{,}8 \times 10^4$ s



4×10^3 ; $7{,}5 \times 10^3$; $1{,}3 \times 10^4$ s

Plan

Conclusion

- théorie générale pour des systèmes hyperboliques avec un comportement asymptotique,
- schéma d'ordre élevé qui préserve l'ensemble des états admissibles $\mathcal{A}$ et la limite de diffusion,
- construction de solutions de référence,
- codes de calcul parallèles et multi-physique pour (1) et (2) en 1D et 2D.

Conclusion

- théorie générale pour des systèmes hyperboliques avec un comportement asymptotique,
- schéma d'ordre élevé qui préserve l'ensemble des états admissibles $\mathcal{A}$ et la limite de diffusion,
- construction de solutions de référence,
- codes de calcul parallèles et multi-physique pour (1) et (2) en 1D et 2D.

Perspectives

- étendre le schéma limite pour prendre en compte des systèmes de diffusion ou des équations de diffusion plus complexes,
- obtenir un schéma qui vérifie toutes les hypothèses du théorème afin de s'affranchir de la correction avec le flux à deux points,
- choix de β pour la combinaison convexe de l'ordre élevé,
- diminution du temps de calcul pour l'hydrodynamique radiative,
- construire un schéma d'ordre élevé dans tous les régimes.

Merci de votre attention.

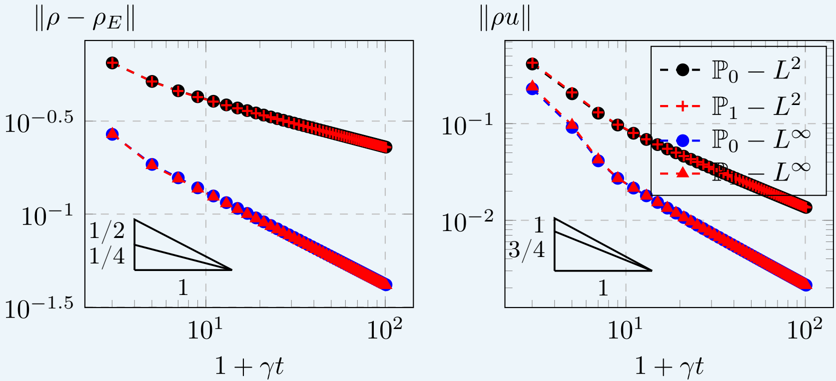


FIGURE – Vitesses de convergence en norme L^2 et L^∞ pour la densité et la quantité de mouvement avec $\Delta x = 5 \times 10^{-2}$ et $\kappa = 1$ en 1D

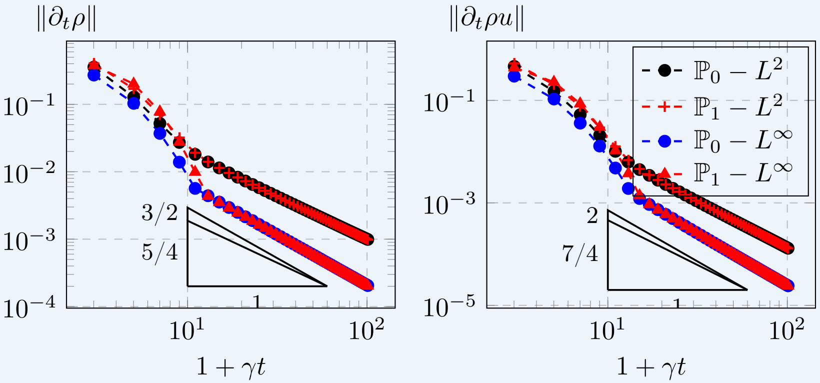


Figure – Vitesses de convergence en norme L^2 et L^∞ pour la dérivée première en temps de la densité et de la quantité de mouvement avec $\Delta x = 5 \times 10^{-2}$ et $\kappa = 1$ en 1D

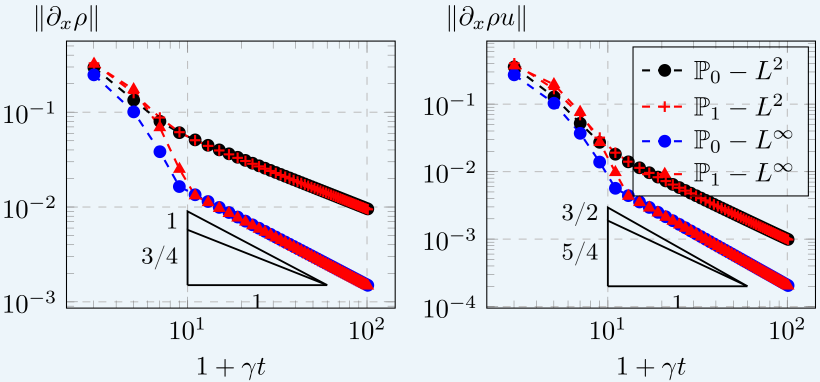


FIGURE – Vitesses de convergence en norme L^2 et L^∞ pour la dérivée première en espace de la densité et de la quantité de mouvement avec $\Delta x = 5 \times 10^{-2}$ et $\kappa = 1$ en 1D

Idée naturelle : MOOD Clain, Diot et Loubère [CDL11 ; Dio12]

- reconstruction polynomiale $\widetilde{\mathbf{W}}_K(\boldsymbol{x})$,
- limitation *a posteriori* comme pour la correction avec le flux HLL-TP.

Idée naturelle : MOOD Clain, Diot et Loubère [CDL11 ; Dio12]

- reconstruction polynomiale $\widetilde{\mathbf{W}}_K(\boldsymbol{x})$,
- limitation *a posteriori* comme pour la correction avec le flux HLL-TP.

Mais :

- la reconstruction polynomiale doit être faire par interface pour la limite : Clain, Machado, Nóbrega et Pereira [CMNP13],

Idée naturelle : MOOD CLAIN, DIOT et LOUBÈRE [CDL11 ; Dio12]

- reconstruction polynomiale $\widetilde{\mathbf{W}}_K(\boldsymbol{x})$,
- limitation *a posteriori* comme pour la correction avec le flux HLL-TP.

Mais :

- la reconstruction polynomiale doit être faire par interface pour la limite : CLAIN, MACHADO, NÓBREGA et PEREIRA [CMNP13],
- les coefficients α de BERTHON et TURPAULT [BT11] limitent le schéma à l'ordre un.

Idée naturelle : MOOD Clain, Diot et Loubère [CDL11 ; Dio12]

- reconstruction polynomiale $\widetilde{\mathbf{W}}_K(\boldsymbol{x})$,
- limitation *a posteriori* comme pour la correction avec le flux HLL-TP.

Mais :

- la reconstruction polynomiale doit être faire par interface pour la limite : Clain, Machado, Nóbrega et Pereira [CMNP13],
- les coefficients α de Berthon et Turpault [BT11] limitent le schéma à l'ordre un.

Nouvelle combinaison convexe :

$$\overline{\mathbf{W}}_K(\boldsymbol{x}) = \beta_K \widetilde{\mathbf{W}}_K(\boldsymbol{x}) + (1 - \beta_K)\mathbf{W}_K$$

$$\beta_K = \frac{\Delta_l}{\Delta_l + \gamma_K t \Delta x_K} \in [0; 1]$$

HLL-DLP-AP avec $\overline{\mathbf{W}}(x)$

$\downarrow$

HLL-DLP-AP-$\mathbb{P}_0$ $(\mathbf{W})$

$\downarrow$

HLL-TP-$\mathbb{P}_0$

Cascade de schémas

HLL-DLP-AP avec $\overline{\mathbf{W}}(x)$

HLL-DLP-AP-$\mathbb{P}_0$ $(\mathbf{W})$

HLL-TP-$\mathbb{P}_0$

Précision

Stabilité, préservation de $\mathcal{A}$

Cascade de schémas

HLL-DLP-AP avec $\overline{\mathbf{W}}(x)$

$\downarrow$

HLL-DLP-AP-$\mathbb{P}_0$ $(\mathbf{W})$

$\downarrow$

HLL-TP-$\mathbb{P}_0$

Précision $\uparrow$

$\downarrow$ Stabilité, préservation de $\mathcal{A}$

Pas d'activation quand $\gamma t \to \infty$

Références I

D. Aregba-Driollet, M. Briani, and R. Natalini, Asymptotic high-order schemes for 2×2 dissipative hyperbolic systems, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 46, no. 2, pp. 869–894, 2008 (p. 19).

D. Aregba-Driollet, M. Briani, and R. Natalini, Time asymptotic high order schemes for dissipative BGK hyperbolic systems, *Numer. Math.*, vol. 132, no. 2, pp. 399–431, 2016 (p. 19).

C. Berthon, P. Charrier, and B. Dubroca, An HLLC scheme to solve the M_1 model of radiative transfer in two space dimensions, *J. Sci. Comput.*, vol. 31, no. 3, pp. 347–389, 2007 (p. 19).

C. Berthon, P. G. LeFloch, and R. Turpault, Late-time/stiff-relaxation asymptotic-preserving approximations of hyperbolic equations, *Math. Comp.*, vol. 82, no. 282, pp. 831–860, 2013 (pp. 4–7).

C. Berthon, G. Moebs, C. Sarazin-Desbois, and R. Turpault, An asymptotic-preserving scheme for systems of conservation laws with source terms on 2D unstructured meshes, *Commun. Appl. Math. Comput. Sci.*, vol. 11, no. 1, pp. 55–77, 2016 (pp. 20, 21).

Références II

C. Berthon and R. Turpault, Asymptotic preserving HLL schemes, *Numer. Methods Partial Differential Equations*, vol. 27, no. 6, pp. 1396–1422, 2011 (pp. 19, 24, 25, 58–62, 84–87).

S. Bianchini, B. Hanouzet, and R. Natalini, Asymptotic behavior of smooth solutions for partially dissipative hyperbolic systems with a convex entropy, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 60, no. 11, pp. 1559–1622, 2007 (pp. 81–83).

F. Blachère and R. Turpault, An admissibility and asymptotic-preserving scheme for systems of conservation laws with source term on 2D unstructured meshes, *J. Comput. Phys.*, vol. 315, pp. 98–123, 2016 (pp. 37, 38, 58–62).

S. Boscarino, P. G. LeFloch, and G. Russo, High-order asymptotic-preserving methods for fully nonlinear relaxation problems, *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 36, no. 2, A377–A395, 2014 (p. 19).

S. Boscarino, L. Pareschi, and G. Russo, Implicit-explicit Runge-Kutta schemes for hyperbolic systems and kinetic equations in the diffusion limit, *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 35, no. 1, A22–A51, 2013 (p. 19).

F. Bouchut, H. Ounaissa, and B. Perthame, Upwinding of the source term at interfaces for euler equations with high friction, *Comput. Math. Appl.*, vol. 53, no. 3-4, pp. 361–375, 2007 (p. 19).

J. Breil and P.-H. Maire, A cell-centered diffusion scheme on two-dimensional unstructured meshes, *J. Comput. Phys.*, vol. 224, no. 2, pp. 785–823, 2007 (pp. 20, 21).

C. Buet and S. Cordier, An asymptotic preserving scheme for hydrodynamics radiative transfer models: numerics for radiative transfer, *Numer. Math.*, vol. 108, no. 2, pp. 199–221, 2007 (p. 19).

C. Buet and B. Després, Asymptotic preserving and positive schemes for radiation hydrodynamics, *J. Comput. Phys.*, vol. 215, no. 2, pp. 717–740, 2006 (p. 19).

C. Buet, B. Després, and E. Franck, An asymptotic preserving scheme with the maximum principle for the M_1 model on distorded meshes, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, vol. 350, no. 11-12, pp. 633–638, 2012 (pp. 20, 21).

C. Buet, B. Després, and E. Franck, Design of asymptotic preserving finite volume schemes for the hyperbolic heat equation on unstructured meshes, *Numer. Math.*, vol. 122, no. 2, pp. 227–278, 2012 (pp. 20, 21).

C. Buet, B. Després, and E. Franck, Asymptotic preserving schemes on distorted meshes for Friedrichs systems with stiff relaxation: application to angular models in linear transport, *J. Sci. Comput.*, vol. 62, no. 2, pp. 371–398, 2015 (pp. 20, 21).

C. Buet, B. Després, E. Franck, and T. Leroy, Proof of uniform convergence for a cell-centered AP discretization of the hyperbolic heat equation on general meshes, *Mathematics of Computation*, 2016 (pp. 20, 21).

C. Chalons, F. Coquel, E. Godlewski, P.-A. Raviart, and N. Seguin, Godunov-type schemes for hyperbolic systems with parameter-dependent source. The case of Euler system with friction, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, vol. 20, no. 11, pp. 2109–2166, 2010 (p. 19).

S. Clain, S. Diot, and R. Loubère, A high-order finite volume method for systems of conservation laws—Multi-dimensional Optimal Order Detection (MOOD), *J. Comput. Phys.*, vol. 230, no. 10, pp. 4028–4050, 2011 (pp. 24, 25, 43–47, 84–87).

S. Clain, G. J. Machado, J. M. Nóbrega, and R. M. S. Pereira, A sixth-order finite volume method for multidomain convection-diffusion problem with discontinuous coefficients, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 267, pp. 43–64, 2013 (pp. 84–87).

Y. Coudière, J.-P. Vila, and P. Villedieu, Convergence rate of a finite volume scheme for a two-dimensional convection-diffusion problem, *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, vol. 33, no. 3, pp. 493–516, 1999 (pp. 20, 21).

G. Dimarco and L. Pareschi, High order asymptotic-preserving schemes for the Boltzmann equation, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, vol. 350, no. 9-10, pp. 481–486, 2012 (p. 19).

S. Diot, La méthode MOOD Multi-dimensional Optimal Order Detection: la première approche a posteriori aux méthodes volumes finis d'ordre très élevé, PhD thesis, Université de Toulouse, Université Toulouse III-Paul Sabatier, Aug. 2012 (pp. 24, 25, 84–87).

J. Droniou and C. Le Potier, Construction and convergence study of schemes preserving the elliptic local maximum principle, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 49, no. 2, pp. 459–490, 2011 (pp. 28–35).

B. Dubroca and J. Feugeas, Theoretical and numerical study of a moment closure hierarchy for the radiative transfer equation, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, vol. 329, no. 10, pp. 915–920, 1999 (pp. 8, 9).

A. Duran, F. Marche, R. Turpault, and C. Berthon, Asymptotic preserving scheme for the shallow water equations with source terms on unstructured meshes, *J. Comput. Phys.*, vol. 287, pp. 184–206, 2015 (pp. 20, 21).

F. Filbet and S. Jin, A class of asymptotic-preserving schemes for kinetic equations and related problems with stiff sources, *J. Comput. Phys.*, vol. 229, no. 20, pp. 7625–7648, 2010 (p. 19).

E. Franck, Design and numerical analysis of asymptotic preserving schemes on unstructured meshes. Application to the linear transport and Friedrichs systems, PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, Oct. 2012 (pp. 20, 21).

M. González, E. Audit, and P. Huynh, HERACLES: a three-dimensional radiation hydrodynamics code, *A&A*, vol. 464, no. 2, pp. 429–435, 2007 (p. 76).

M. Gonzalez, Contribution to the numerical study of radiation hydrodynamics: from radiative shocks experiments to astrophysical jets, PhD thesis, Université Paris Sud - Paris XI, Oct. 2006 (p. 76).

L. Gosse and G. Toscani, An asymptotic-preserving well-balanced scheme for the hyperbolic heat equations, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, vol. 334, no. 4, pp. 337–342, 2002 (p. 19).

B. Hanouzet and R. Natalini, Global existence of smooth solutions for partially dissipative hyperbolic systems with a convex entropy, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, vol. 169, no. 2, pp. 89–117, 2003 (pp. 6, 7).

J. C. Hayes and M. L. Norman, Beyond flux-limited diffusion: parallel algorithms for multidimensional radiation hydrodynamics, *The Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 147, no. 1, pp. 197–220, 2003 (p. 76).

Références IX

F. Huang, P. Marcati, and R. Pan, Convergence to the Barenblatt solution for the compressible Euler equations with damping and vacuum, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, vol. 176, no. 1, pp. 1–24, 2005 (pp. 6, 7).

S. Jin, Efficient asymptotic-preserving (AP) schemes for some multiscale kinetic equations, *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 21, no. 2, 441–454 (electronic), 1999 (pp. 14–18).

A. Klar, An asymptotic preserving numerical scheme for kinetic equations in the low Mach number limit, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 36, no. 5, 1507–1527 (electronic), 1999 (p. 19).

A. Kurganov and E. Tadmor, Solution of two-dimensional Riemann problems for gas dynamics without Riemann problem solvers, *Numer. Methods Partial Differential Equations*, vol. 18, no. 5, pp. 584–608, 2002 (pp. 53, 54).

P. Lafitte and G. Samaey, Asymptotic-preserving projective integration schemes for kinetic equations in the diffusion limit, *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 34, no. 2, A579–A602, 2012 (p. 19).

M. Lemou and L. Mieussens, A new asymptotic preserving scheme based on micro-macro formulation for linear kinetic equations in the diffusion limit, *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 31, no. 1, pp. 334–368, 2008 (p. 19).

P. Marcati and A. Milani, The one-dimensional Darcy's law as the limit of a compressible Euler flow, *J. Differential Equations*, vol. 84, no. 1, pp. 129–147, 1990 (pp. 6, 7).

G. Pomraning, *The equations of radiation hydrodynamics*, ser. International series of monographs in natural philosophy. 1973 (pp. 8, 9).

P. Woodward and P. Colella, The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks, *J. Comput. Phys.*, vol. 54, no. 1, pp. 115–173, 1984 (pp. 51, 52).